

研究ノート

リードタイムが変動する在庫管理モデルの安定性解析

—スイッチドシステムとしての考察

山形大学人文学部法経政策学科

西 平 直 史

1. はじめに

在庫管理問題において、リードタイムの存在がしばしば問題を難しくすることがある。リードタイムとは、供給が必要になった時点と実際に供給が行われる時点との差であり、生産活動や輸送活動などに要する時間のことである。企業は、リードタイムを短くするため様々な取り組みを行っているが、これを零にすることは不可能である。リードタイムが既知でかつ変動しない場合には、“予測”の精度が高くなり問題は比較的扱いやすい。しかし、リードタイムが未知の場合や、リードタイムが変動する場合には、扱いが困難になる。

リードタイムをもつ在庫管理モデルの解析に関する研究はこれまで数多くの結果が出されてきたが、参考文献1) - 5)では、制御理論を用いて在庫管理モデルを解析する手法が提案されてきた。このうち、参考文献1) - 4)では、リードタイムが既知のものに限られている。参考文献5)の結果は、リードタイムが変動し、かつその上界と下界のみが分かればよいものである。基本的な考え方は、リードタイムの大きさごとにシステムを記述し、リードタイムが変動することをシステムが切り替わるものと見なすことである。しかしながら、同時安定性を用いて解析しているため、切り替わるシステムすべてが内部安定であることを求めるものである。実際には、切り替わった一部のシステムが不安定であっても全体としては安定となることがあるが、そのような状況には適用できない保守的なものであった。本稿では、スイッチドシステムの滞留時間を用いた安定解析法^{6), 7)}を用いることにより、参考文献5)では安定性を保証できなかった不安定なシステムを含むようなシステムに対して、安定性を保証できることを数値例により示す。

2. 問題の定式化

本稿では、参考文献5)と同じ在庫管理モデルを考える。

$$x(k+1) = x(k) + w(k) - d(k) \quad (1)$$

ここで、 $x(k)$ は時刻 k における在庫量、 $w(k)$ は入庫量、 $d(k)$ は出庫量である。リードタイムを $L(k)$ で表すと、時刻 k での発注量 $u(k)$ と実際の入庫量 $w(k)$ との関係は、

$$w(k) = u(k-L(k)) \quad (2)$$

となる。このモデルに対して、メモリーレスフィードバック

$$u(k) = Kx(k) \quad (3)$$

を施すことを考える。また、本稿では内部安定性を考えるため、外生信号 $d(k) = 0$ とすると、システム (1) は

$$x(k+1) = x(k) - Kx(k-L(k)) \quad (4)$$

となる。

つぎに、リードタイム $L(k)$ については、その下界 L_m と上界 L_M が分かっているものとする。すなわち

$$0 \leq L_m \leq L(k) \leq L_M \quad (5)$$

が成り立つものとする。また、本稿ではスイッチドシステムに対する滞留時間^{6), 7)} の考え方をを用いるため、 $L(k)$ の各値をとる割合が既知であると仮定する。例えば、 $L_m = 1$, $L_M = 3$ の場合、 $L(k) = 1$, $L(k) = 2$, $L(k) = 3$ をとる割合がそれぞれ分かっている状況を考える。

つぎに、システム (4) をスイッチドシステムとして表現することを考える。ここでは、 $L_m = 1$, $L_M = 3$ のケースを考える¹⁾。 $L(k) = 1$ のとき、

$$v(k+1) = A_1 v(k) \quad (6)$$

ただし、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & K & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ x(k-2) \\ x(k-3) \end{bmatrix}$$

である。 $L(k) = 2$ のときは

$$v(k+1) = A_2 v(k) \quad (7)$$

ただし、

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & K \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、 $L(k) = 3$ のときは

$$v(k+1) = A_3 v(k) \quad (8)$$

ただし、

1 一般化はここでは省略するが、参考文献5)と同様に行うことができる。

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & K \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。したがって、システム (4) をスイッチドシステムとして表すと

$$v(k+1) = A_N v(k), \quad (N=1, 2, 3) \quad (9)$$

と求められる。以下ではシステム (9) が内部安定となる条件を考察することにする。

3. 平均滞留時間を用いた安定解析と数値例による検討

システム (9) のようなスイッチドシステムに対して、滞留時間を用いた安定条件が導出されている^{6), 7)}。ここでは、参考文献6)の結果を用いて、システム (9) の安定解析を行うことにする。この手法は、システムの各モード²⁾の平均滞留時間と安定なモードと不安定なモードの滞留時間比に基づいたものである。この定理と証明の詳細は参考文献6)を参照していただきたい。ここではこの結果に基づいた数値例を用いて、この手法を用いた安定解析の有効性を確認する。

参考文献5)では、システム (9) において $K=-0.5$ の場合には同時安定性に基づいた手法では安定性を保証できないにも関わらず、シミュレーションの結果は平衡点に収束していた。ここでは、同じ数値例を考えることにする。 A_1 の固有値³⁾は、 $0, 0, 0.5+i0.5, 0.5-i0.5$ であり、 $N=1$ は安定なモードである。 A_2 の固有値は、 $0, -0.5652, 0.7826+i0.5217, 0.7826-i0.5217$ であり⁴⁾、 $N=2$ も安定なモードである⁵⁾。 A_3 の固有値は、 $0.9163+i0.4577, 0.9163-i0.4577, -0.1463+i0.5507, -0.1463-i0.5507$ であり、 $N=3$ は不安定なモードである。このとき、安定なモードの各固有値の大きさを計算し、その最大値 0.9406 を l_1 とし⁶⁾、不安定なモードの固有値の大きさの最大値 1.0242 を l_2 とする。 $l=0.999999999$ とすると、参考文献6)の定理の条件を満足し、この時の安定なモードと不安定なモードの滞留時間比は 0.3904 と求まる。参考文献5)では、 $L(k)$ を一様分布と考えていたので、各モードの滞留時間は等しい状況を考えており、安定なモードが2つ、不安定なモードが1つであることから、滞留時間比は $2/1=2$ となる。これは求めた滞留時間比 0.3904 より大きいから、このスイッチドシステムは安定であることが言える。滞留時間比は安定なモードに滞留する時間を不安定なモードに滞留する時間で割ったもので、不安定な時間に滞留する時間の割合が大きいほど値は小さくなる。直感的には、不安定なモードの不安定度が小さく安定なモードの不安定度が大きければ滞留時間比はより小さいものを許容できるが、逆の場合には滞留時間比はより大きいものしか許容できないことになる。今回の例では不安定なモードの不安定度が

2 モードとは、システム (9) において $N=1, 2, 3$ の各値のことである。

3 以下での固有値と固有値の大きさの計算には *Matlab* を用いた。

4 ここでの i は $i^2=-1$ となる虚数単位を表すものとする。

5 システムが安定であるための必要十分条件は行列 A_1 のすべての固有値が、複素平面内の開単位円内にあることである。

6 参考文献6)では λ_1 であるが、ここでは l_1 とした。ここでは、他の λ も l として記す。

安定なモードの安定度と比べてそれほど大きくないため⁷滞留時間比が0.3904まで安定であることが保証できる。

最後に、参考文献5)の方法と、本稿での方法を比較しておこう。参考文献5)の方法は、同時安定性の概念を用いているため、システムの各モードがすべて安定でなければ全体システムの安定性を保証できない。一方で、本稿の方法では、不安定なモードが存在していても、システムが全体として安定になる場合にも適用することができ、参考文献5)とは違うクラスのシステムの安定性を保証することができる。一方で、参考文献5)の方法は数値計算によりLMIを解くだけでよく、パッケージソフトウェアを使って簡単に計算できる。本稿の方法は、計算が複雑であること、パラメータのチューニングが必要となることが欠点である。実際、数値例で $l=0.9999999999$ と設定し、 l_1 と l_2 についても行列の固有値に基づいて決定したが、これらを系統立てて決定する方法はなく、試行錯誤的に決定した。そのため、本稿の方法で安定性を保証できるクラスが参考文献5)のものを含んでいるかについて示すことは困難である。

4. おわりに

本稿では、リードタイムが変動する在庫管理モデルを、スイッチドシステムとして表現し、滞留時間を用いた安定解析法により解析する手法を示した。先行研究では安定性を保証できないクラスにも適用できることを数値例により示した。

今後の課題としては、対象とするシステムを一般化すること、パラメータの系統だった設定法を考察すること、非負制約を加えた場合を検討することがあげられる。

参考文献

- 1) 伊藤, 橋本, 石原: 最適制御理論を用いたブルウィップ効果を防止する在庫補充方式の提案, 日本オペレーションズ・リサーチ学会2006年春季研究発表会, pp.66-67 (2006)
- 2) 西平: サプライチェーンにおける Bullwhip 効果を抑制するための一手法—むだ時間システムとメモリーレスフィードバックを用いた解析—, 山形大学人文学部研究年報, 5, pp.205-214 (2008)
- 3) 西平: むだ時間システムとしてとらえたサプライチェーンについての一考察—リードタイムが既知の場合—, 山形大学人文学部研究年報, 6, pp.157-162 (2009)
- 4) 西平: サプライチェーンに対して構成したサーボ系の解釈とその応用, 山形大学大学院社会文化システム研究科紀要, 7, pp.105-109 (2010)
- 5) 西平: 制御理論を用いた在庫管理モデルの一解析—リードタイムが変動する場合—, 山形大学人文学部研究年報, 12, pp. 43-51 (2015)

⁷ 不安定なモードの不安定度は固有値の大きさの最大値により求まる。安定なモードの安定度は固有値の最大値が0にどれだけ近いかににより求まる。

- 6) G. Zhai, B. Hu, 安田, A. N. Michel : 離散時間切替えシステムの安定性と L_2 ゲイン解析, システム制御情報学会論文誌, Vol. 15, No. 3, pp. 117-125 (2002)
- 7) 増淵, G. Zhai : ハイブリッドシステムの制御 - V - スイッチドシステムの解析と制御, システム/制御/情報, Vol. 52, No. 1, pp. 25-31 (2008)

A Stability Analysis of Inventory Management Models with Varying Lead Times: A Consideration of Switched Systems

Naofumi NISHIHIRA

This paper considers the problem of a stability analysis of inventory management models when the lead time is varied. The previous work was showed that the stability of the models can be reduced to simultaneously stability for switched dynamical systems. However this method is conservative. In this paper, the stability analysis for switched dynamical systems using the dwell time method is used, and showed that this method can be used when the entire system has some unstable subsystems illustrated by a numerical example.